$\forall \alpha \in G \Rightarrow$ ορίζουμε αυτομορφισμό

$\Gamma_\alpha : G \to G$ τύπου

$\Gamma_\alpha(\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}$ συζυγία ως προς α

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_\alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma\alpha^{-1} \\ &\Gamma_\alpha(\beta)\Gamma_\alpha(\gamma) = \alpha\beta\cancel{\alpha^{-1}\alpha}\gamma\alpha^{-1} = \alpha\beta\gamma\alpha^{-1} \end{aligned}\right\} \text{ομομορφισμός}$$

Γ_α : 1-1 $\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\gamma\alpha^{-1} \Rightarrow \beta = \gamma$

επί $\Rightarrow \Gamma_\alpha \in Aut(G)$

Inn (inner automorphisms) $(G) = \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \in G\}$

$Inn(G) \leq Aut(G)$

και $Inn(G) \trianglelefteq Aut(G) \Leftrightarrow \forall f \in Aut(G)$ έχουμε

$(f\Gamma_\alpha f^{-1})(\beta) = (f\Gamma_\alpha)(f^{-1}(\beta)) = f(\Gamma_\alpha(f^{-1}(\beta))) =$

$= f(\alpha f^{-1}(\beta)\alpha^{-1}) = f(\alpha) f f^{-1}(\beta) f(\alpha)^{-1} = \Gamma_{f(\alpha)}(\beta) \in Inn(G)$

Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των υποομάδων της Y και των υποομάδων της O οι οποίες περιέχουν τον πυρήνα της f.

$$Y \xleftrightarrow{1-1} O$$

{υποομάδες} {Υποομάδες ⊇ kerf}

Η τάξη της $f(a)$ διαιρεί την τάξη του a ($\ker f \triangleleft O$)

ΠΡΩΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Έστω $f: O \to Y$ ομομορφισμός

$f': O \to f(O) \leq Y$, $f'(a) = f(a)$

f' επιμορφισμός. Τότε $\exists$ ισομορφισμός μεταξύ $O/\ker(f)$ και του K. (Δηλ. $\bar{f}: O/\ker f \to f(O) \leq Y$)

Αποδειξη

$\ker f \triangleleft O$ και $f(\ker f) = \{1_Y\}$

$O/\ker f \xrightarrow{\bar{f}} f(O)$ με τύπο

$\bar{f}(a\ker f) = f(a)$

Η $\bar{f}$ είναι ομομορφισμός ομάδων

$\bar{f}(\alpha\ker f\, b\ker f) = f(\alpha b) = f(\alpha)\cdot f(b) = \bar{f}(\alpha\ker f)\cdot\bar{f}(b\ker f)$

$\forall x \in f(O) \Rightarrow \exists a \in O$ με $f(a) = x \Rightarrow \bar{f}(\alpha\ker f) = x$

$\bar{f}$ επιμορφισμός

$\bar{f}$ είναι 1-1 $\quad \bar{f}(\alpha\ker f) = 1_Y \in f(O) \Rightarrow \alpha \in \ker f \Rightarrow \alpha\ker f = \ker f$

$\bar{f}$ ισομορφισμός

$\ker f \triangleleft O$

$\ker f \xrightarrow[\text{εγκλεισμός}]{i} O$, $\quad O \xrightarrow{\pi} O/\ker f$

$a \longmapsto \pi(a) = \alpha\ker f$

$$\ker f \xrightarrow{i} O \xrightarrow{\pi} O/\ker f \cong f(O)$$

Αν $\alpha \in \operatorname{Im} i = \ker f \Rightarrow \pi(\alpha) = \ker f \Rightarrow \alpha \in \ker\pi$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} i = \ker\pi \\ i \text{ είναι } 1\text{-}1 \\ \pi \text{ είναι επι} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \xrightarrow{1} \ker f \xrightarrow{i} O \xrightarrow{\pi} O/\ker f \xrightarrow{\text{μοναδικός}} 1$$

$\{1\} = Im\, 1 = ker\, i \Rightarrow 1\text{-}1$

$Im\, i = ker\, \Pi$

Μηδενική είναι επί

ker Μηδενική $= O / ker f$

Ορισμός: Εστω ενα διάγραμμα ομομορφισμών ομάδων

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \Gamma$

Το διάγραμμα αυτό θα καλείται ακριβές στο B αν ισχυει $Im\, f = ker\, g$

Αυτό γίνεται

$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} A_4 \xrightarrow{f_4} \dots$

ΠΧ

$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \underset{\varepsilon\pi\iota}{\xrightarrow{\Pi}} \mathbb{Z}/ker\Pi \longrightarrow \{0\}$ $\quad \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$

$Im(\times 2) = 2\mathbb{Z} = ker\, \Pi$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ Θ. Cayley)

Εστω Y υποομάδα της O και X το συνολο των δεξιων συμπλόκων της Y ως προς O. Υπαρχει υποομάδα Π της O η οποια να είναι κανονική η οποία να είναι κανονική ωστε η O/Π ομάδα να είναι ισομορφη με κάποια υποομάδα της Σ_x

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δίνεται O και Y

Να βραθεί την $\Pi \trianglelefteq O$

Με Σ_x συμβολίζουμε ολες τις 1-1 απεικονίσεις απο το X στο X. $X = \{Ya \mid a \in O\} \underset{1\text{-}1}{\xrightarrow{f}} X \Rightarrow f \in \Sigma_x$

Ορίζουμε $\varphi: O \to \Sigma_x$ με τύπο $\alpha \mapsto \varphi(\alpha)$ μετάθεση στο συνολο X $\quad \varphi(\alpha): X \to X$

$Yb \mapsto Yb\alpha^{-1}$

Η $\varphi(\alpha)$ μετάθεση στο X.

Η φ είναι ομομορφισμός
$\varphi(a \cdot a')(Yb) = Yb(aa')^{-1} = Yb(a')^{-1}a^{-1} = \varphi(a)(Yb(a')^{-1}) =$
$= \varphi(a)(\varphi(a') \cdot (Yb)) = \varphi(a) \cdot \varphi(a') \cdot Yb$
$\ker \varphi =$;
Η Σ_X έχει μοναδιαίο την ταυτοτική μετάθεση στο X
$a \in \ker\varphi \iff \varphi(a) = 1_X \iff \varphi(a)(Yb) = Yb,\ \forall b \in O \iff Yba^{-1} = Yb.$
Το a τότε θα ανήκει στο Y
Ορίζουμε $\Pi = \ker\varphi \trianglelefteq O$ και $\Pi \leq Y$
Από 1ο Θεωρ Ισομορφ.
$O/\Pi \cong \mathrm{Im}\,\varphi \leq \Sigma_X$

Έστω O ομάδα και $Y, T \leq O$
Το σύνολο $YT = \{yt \mid y \in Y$ και $t \in T\}$
Αν $T \trianglelefteq O \Rightarrow YT \leq O$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών)
Έστω $Y, T \leq O$ και $T \trianglelefteq O$. Τότε ισχύει $Y/_{Y\cap T} \cong YT/T$

ΠΟΡΙΣΜΑ: $|YT| \cdot |Y \cap T| = |Y| \cdot |T|$
Μας θυμίζει
$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού)
Έστω $Y, T \trianglelefteq O$ με $Y \trianglelefteq T$ τότε ισχύει.
$T/Y \trianglelefteq O/Y$ και $(O/Y)/(T/Y) \cong O/T$.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΑΒΕΛΙΑΝΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

Ερώτημα: Αν $T, Y \trianglelefteq O$, ισχύει ότι $O \cong T \times Y$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $Y, \Sigma \triangleleft O$ με $O = Y\Sigma$ και $Y \cap \Sigma = \{e\}$ τότε $O \cong Y \times \Sigma$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$O = Y\Sigma \Rightarrow (\forall a \in O)(\exists b \in Y)$ και $(\exists \gamma \in \Sigma)$ με $a = b\gamma$

Είναι ο μοναδικός; Έστω ότι δεν είναι:

$\alpha = b\gamma = b'\gamma' \Rightarrow \underbrace{(b')^{-1}b}_{\in Y} = \underbrace{\gamma'\gamma^{-1}}_{\in \Sigma} \Rightarrow b' = b$ και $\gamma' = \gamma$ με $Y \cap \Sigma = \{1\}$

Αν πάρουμε το στοιχείο $\gamma b \in O$, Άρα, $\exists b' \in Y$ και $\gamma' \in \Sigma$ με $\gamma b = b'\gamma'$. Θα χρησιμοποιήσουμε την κανονικότητα

$\gamma b = b'\gamma' \Rightarrow \underbrace{\gamma b \gamma^{-1}}_{\in Y} = \underbrace{b'\gamma'\gamma^{-1}}_{\in \Sigma} \Rightarrow \underbrace{(b')^{-1}(\gamma b \gamma^{-1})}_{\in Y} = \underbrace{\gamma'\gamma^{-1}}_{\in \Sigma}$

$\gamma'\gamma^{-1} = 1 \Rightarrow \gamma = \gamma'$ και $b = b'$

Δηλ. $\gamma b = b\gamma$ χωρίς η O να είναι αβελιανή

Ορίζουμε $\varphi : O \to Y \times \Sigma$ με τύπο

$\varphi(a) = (b, \gamma)$ με $\alpha = b\gamma \Rightarrow$ Η φ ισομορφισμός

ΠΧ

Έστω O κυκλική τάξης pq, p και q πρώτοι

$Y = \{a \mid o(\alpha) = p$ ή $1\}$

$\Sigma = \{b \mid o(b) = q$ ή $1\}$

Τότε $O \cong Y \times \Sigma$ ή $\mathbb{Z}_{pq} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω O ομάδα και p πρώτος

1) Η O καλείται: τάξης δύναμης p, αν $|O| = p^k$

2) Η O καλείται p-ομάδα αν κάθε στοιχείο της έχει τάξη δύναμη του p.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Μια πεπερασμένη αβελιανή είναι τάξης p ανν είναι p-ομάδα.

Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$: $|G|=p^k$ και τότε $o(\alpha)/p^k \Rightarrow o(\alpha)=p^l$, $0\leq l\leq k$

$(\Leftarrow)$: Κάθε στοιχείο έχει τάξη δύναμη του p ⊕

Έστω $|G|=p^k q$ με $(q,p)=1$ και q όχι απαραίτητα πρώτος. Θέλουμε $q=1$

Η G είναι αβελιανή και υπάρχει r πρώτος με r/q $\Rightarrow r\nmid p$ (+++). Άρα υπάρχει $a\in G$ με $o(a)=r$ (++)

Από, ⊕, (++), (+++) άτοπο

ΛΗΜΜΑ: Έστω G αβελιανή με $|G|=\mu\nu$ με $(\mu,\nu)=1$

Ορίζουμε $A=\{a\in G$ με $a^{\mu}=1\}$ και $B=\{b\in G$ με $b^{\nu}=1\}$

Τότε $G\simeq A\times B$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ν φυσικός ≥ 1. Μία διαμέριση του ν είναι μία (απλώς) φθίνουσα ακολουθία φυσικών με $1\leq \nu_k\leq \nu_{k-1}\leq \dots \leq \nu_1\leq \nu$ με $\nu_k+\nu_{k-1}+\dots+\nu_1=\nu$

Με $\delta(\nu)$ θα συμβολίζουμε το πλήθος όλων των διαμερίσεων

Πχ

$\nu=1$, $\delta(1)=1$

$\nu=2$, $\delta(2)=2$ (αφού $1+1=2$)

$\nu=3$, $1+1+1=3$, $\delta(3)=3$

$\nu=4$, $4=1+3=1+1+2=1+1+1+1=2+2$, $\delta(4)=5$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω ν και k φυσικοί θετικοί. Οι διαμερίσεις του (ν,k) ανεξάρτητα θα δίνονται από $\delta(\nu)\cdot\delta(k)$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Ομάδες αβελιανές τάξης 4

$\mathbb{Z}_{2^2}$ και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$4=2^2$ και βρίσκουμε τη διαμέριση

του εκθέτη: $2=1+1$

Π.Χ

Έστω G αβελιανή π-ομάδα τάξης π^n

Τότε η G θα είναι ισόμορφη με $\mathbb{Z}_{\pi^{\nu_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\pi^{\nu_k}}$

όπου $(\nu_1, \dots, \nu_k)$ διαμέριση του ν

Πχ

γνωρίζουμε ότι: Αν G αβελιανή και $|G|=p^\nu q^\nu$

τότε $G \cong A \times B$ με $|A|=p^\nu$ και $|B|=q$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΑΒΕΛΙΑΝΩΝ

Έστω $|G|<\infty$ αβελιανή μη τετριμμένη. Η G είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μη-τετριμμένων κυκλικών ομάδων τάξης δύναμης πρώτου. Οι δυνάμεις των κυκλικών καθορίζονται μονοσήμαντα από την G. Οι πρώτοι που εμφανίζονται στις κυκλικές είναι όλοι οι πρώτοι ~~διαιρέτες~~ της $|G|$. Για κάθε τέτοιο πρώτο π έχουμε τη διάσταση:

$\pi^{\nu_1} \geq \pi^{\nu_2} \geq \dots \geq \pi^{\nu_k}$ με $\pi^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_k}$ η μέγιστη δύναμη του π όπου διαιρεί την $|G|$.

Πχ

Να βρεθούν οι μη-ισόμορφες αβελιανές τάξης 36

$|G|=36=2^2 \cdot 3^2$, $|A|=2^2$, $|B|=3^2$

$$G = A \times B$$

$|A|=2^2$, $A=\mathbb{Z}_{2^2}$ ή $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$B = \mathbb{Z}_3^{\,2}$ ή $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Έτσι,

$\delta(2) = 2 = \delta(2) \Rightarrow \delta(2,2) = 4$, $(2^2, 3^2)$ $(2^2, 3, 3)$

$O \cong \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^2} \cong \mathbb{Z}_{36} \cong \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3 \cong$

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \cong$

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ $\to (2,2,3^2)$ $\to (2,2,3,3)$.

Για κάθε πρώτο που διαιρεί την τάξη οι δυνάμεις $\pi^{v_1} \geq \pi^{v_k} \geq \dots \geq \pi^{v_k}$, $\pi^{v_1+\dots+v_k}$ να είναι η μέγιστη δύναμη που διαιρεί την $|O|$ καλούνται αναλλοίωτοι της O.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω O και Σ αβελιανές (πεπερασμένες ή πεπερασμένως παραγόμενες). Οι O και Σ ισόμορφες ανν έχουν τις ίδιες αναλλοίωτες

ΠΟΡΙΣΜΑ (Αντίστροφο του Lagrange)

Εάν η O είναι αβελιανή τάξης v και μ διαιρέτης τότε υπάρχει υποομάδα τάξης μ.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω O πεπεπερασμένως γεννημένη αβελιανή (γεννάται από πεπερασμένο πλήθος γεννητόρων). Η O είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μη τετριμμένων κυκλικών τάξης δύναμης πρώτου και πεπεπερασμένου πλήθους αντιγράφων του $\mathbb{Z}$

$$O \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{\text{ελεύθερο κομμάτι}} \times \underbrace{\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_\ell^{k_\ell}}}_{\text{κομμάτι στρέψης}}$$

, $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ μπορεί να επαναλαμβάνονται. Το ίδιο και ο εκθέτης

$\mathrm{rank}\, O = k$, $\mathrm{torsion}\, O = \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_\ell^{k_\ell}}$

Ασκήσεις

σελ. 84 2, 3, 5, σελ 92, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 18